

(网络收集) 2024 年全国甲卷数学卷带答案带解析图片版 (不完全版)

1.

设 $z=5+i$, 则 $i(\bar{z}+z)=(\quad)$

(A) $10i$

(B) $2i$

(C) 10

(D) -2

【参考答案】A

【详细解析】因为 $z=5+i$, 所以 $i(\bar{z}+z)=10i$, 故选(A).

2. 集合 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $B=\{x|\sqrt{x}\in A\}$, 则 $\complement_A(A\cap B)=(\quad)$

(A) $\{2, 3, 5\}$

(B) $\{2, 3, 5\}$

(C) $\{2, 3, 5\}$

(D) $\{2, 3, 5\}$

【参考答案】D

【详细解析】因为 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $B=\{x|\sqrt{x}\in A\}=\{1, 4, 9, 16, 25, 81\}$, 所以 $\complement_A(A\cap B)=\{2, 3, 5\}$, 故选(D).

3.

若实数 x, y 满足约束条件(略), 则 $z=x-5y$ 的最小值为($\quad$)

(A) 5

(B) $\frac{1}{2}$

(C) -2

(D) $-\frac{7}{2}$

【参考答案】D

【详细解析】将约束条件两两联立可得 3 个交点: $(0, -1)$ 、 $(\frac{3}{2}, 1)$ 和 $(3, \frac{1}{2})$, 经检验都符合约束条件. 代入目标函数可得: $z_{\min}=-\frac{7}{2}$, 故选(D).

4.

等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_5=S_{10}$, $a_5=1$, 则 $a_1=(\quad)$

(A) -2

(B) $\frac{7}{3}$

(C) 1

(D) 2

【参考答案】B

【详细解析】因为 $S_5=S_{10}$, 所以 $S_7=S_{18}$, $a_8=0$, 又因为 $a_5=1$, 所以公差 $d=-\frac{1}{3}$, $a_1=a_8-7d=\frac{7}{3}$, 故选(B).

5.

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(0,$

(A) $\frac{13}{5}$

(B) $\frac{13}{7}$

(C) 2

(D) 3

【参考答案】C

【详细解析】 $e = \frac{c}{a} = \frac{|F_1F_2|}{|PF_2| - |PF_1|} = 2$, 故选(C).

6.

曲线 $f(x) = x^6 + 3x$ 在 $(0, -1)$ 处的切线与坐标轴围成的面积为()

【参考答案】A

【详细解析】因为 $y' = 6x^5 + 3$, 所以 $k = 3$, $y = 3x - 1$, $S = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{6}$, 故选(A).

7.

函数 $f(x) = -x^2 + (e^x - e^{-x})\sin x$ 的大致图像为()

【参考答案】B

【详细解析】选(B).

8.

已知 $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \sqrt{3}$, 则 $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) = ()$

【参考答案】B

【详细解析】因为 $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \sqrt{3}$, 所以 $\tan \alpha = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} = 2\sqrt{3} - 1$, 故选(B).

9.

已知向量 $a = (x+1, x)$, $b = (x, 2)$, 则()(A) “ $a \perp b$ ”的必要条件是 “ $x = -3$ ”(B) “ $a \parallel b$ ”的必要条件是 “ $x = -3$ ”(C) “ $a \perp b$ ”的充分条件是 “ $x = 0$ ”(D) “ $a \parallel b$ ”的充分条件是 “ $x = 0$ ”

【参考答案】C

【详细解析】 $a \perp b$, 则 $x(x+1) + 2x = 0$, 解得: $x = 0$ 或 -3 , 故选(C).

10.

已知 m, n 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面: ①

若 $m \perp \alpha$, $n \perp \alpha$, 则 $m \parallel n$; ②若 $\alpha \cap \beta = m$, $m \parallel n$, 则 $n \parallel \beta$; ③若 $m \parallel \alpha$, $n \parallel \alpha$, m 与 n 可能异面, 也可能相交, 也可能平行; ④若 $\alpha \cap \beta = m$, n 与 α 和 β 所成的角相等, 则 $m \perp n$, 以上命题是真命题的是()

(A)①③

(B)②③

(C)①②③

(D)①③④

$$-ac = \frac{9}{4}ac, \text{ 即: } a^2 + c^2 = \frac{13}{4}ac, \sin^2 A + \sin^2 C = \frac{13}{4} \sin A \sin C = \frac{13}{12}, \text{ 所以 } (\sin A + \sin C)^2 = \sin^2 A + \sin^2 C + 2 \sin A \sin C = \frac{7}{4}, \sin A + \sin C = \frac{\sqrt{7}}{2}, \text{ 故选(C).}$$

11.

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对边分别为 a, b, c , 若 $B = \frac{\pi}{3}$,

$$b^2 = \frac{9}{4}ac, \text{ 则 } \sin A + \sin C = (\quad)$$

(A) $\frac{2\sqrt{39}}{13}$

(B) $\frac{\sqrt{39}}{13}$

(C) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

(D) $\frac{3\sqrt{13}}{13}$

【参考答案】C

【详细解析】因为 $B = \frac{\pi}{3}$, $b^2 = \frac{9}{4}ac$, 所以 $\sin A \sin C = \frac{4}{9} \sin^2 B = \frac{1}{3}$. 由余弦定理可得: $b^2 = a^2 + c^2$

$$-ac = \frac{9}{4}ac, \text{ 即: } a^2 + c^2 = \frac{13}{4}ac, \sin^2 A + \sin^2 C = \frac{13}{4} \sin A \sin C = \frac{13}{12}, \text{ 所以 } (\sin A + \sin C)^2 = \sin^2 A + \sin^2 C + 2 \sin A \sin C = \frac{7}{4}, \sin A + \sin C = \frac{\sqrt{7}}{2}, \text{ 故选(C).}$$

12.

已知 a, b, c 成等差数列, 直线 $ax + by + c = 0$ 与圆 $C: x^2 + (y +$

【参考答案】C

【详细解析】因为 a, b, c 成等差数列, 所以 $a - 2b + c = 0$, 直线 $ax + by + c = 0$ 恒过 $P(1, -2)$, 当 $PC \perp AB$ 时, $|AB|$ 取得最小值, 此时 $|PC| = 1$, $|AB| = 2\sqrt{5 - |PC|^2} = 4$, 故选(C).

13.

二项式 $(\frac{1}{3} + x)^{10}$ 的展开式中系数的最大值是_____.

【参考答案】5

【详细解析】展开式中系数最大的项一定在下面的5项： $C_{10}^5(\frac{1}{3})^5$ 、 $C_{10}^6(\frac{1}{3})^4$ 、 $C_{10}^7(\frac{1}{3})^3$ 、 $C_{10}^8(\frac{1}{3})^2$ 、 $C_{10}^9(\frac{1}{3})^1$ ，计算可得：系数的最大值为 $C_{10}^8(\frac{1}{3})^2=5$.

14.

甲、乙两个圆台上下底面的半径均为 r_2 和 r_1 ，母线长分别为 $2(r_1$

$-r_2)$ 和 $3(r_1-r_2)$ ，则两个圆台的体积之比 $\frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【参考答案】 $\frac{\sqrt{6}}{4}$

【详细解析】 $\frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}} = \frac{h_{\text{甲}}}{h_{\text{乙}}} = \frac{\sqrt{3}(r_1-r_2)}{2\sqrt{2}(r_1-r_2)} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

15.

已知 $a > 1$ ， $\frac{1}{\log_8 a} - \frac{1}{\log_a 4} = -\frac{5}{2}$ ，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【参考答案】64

【详细解析】因为 $\frac{1}{\log_8 a} - \frac{1}{\log_a 4} = \frac{3}{\log_2 a} - \frac{1}{2} \log_2 a = -\frac{5}{2}$ ，所以 $(\log_2 a + 1)(\log_2 a - 6) = 0$ ，而 $a > 1$ ，故 $\log_2 a = 6$ ， $a = 64$.

16.

编号为 1、2、3、4、5、6 的六个小球，不放回的抽取三次，记

m 表示前两个球号码的平均数，记 n 表示前三个球号码的平均数，则 m 与 n 差的绝对值不超过 0.5 的概率是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【参考答案】 $\frac{7}{15}$

【详细解析】记前三个球的号码分别为 a 、 b 、 c ，则共有 $A_6^3 = 120$ 种可能. 令 $|m-n| = \left| \frac{a+b}{2} - \frac{a+b+c}{3} \right| = \left| \frac{a+b-2c}{6} \right| \leq 0.5$ 可得： $|a+b-2c| \leq 3$ ，根据对称性： $c=1$ 或 6 时，均有 2 种可能； $c=2$ 或 5 时，均有 10 种可能； $c=3$ 或 4 时，均有 16 种可能；故满足条件的共有 56 种可能， $P = \frac{56}{120} = \frac{7}{15}$.

17.

题干略.

【参考答案】见解析.

【详细解析】(1) $\chi^2 = \frac{150(70 \times 24 - 26 \times 30)^2}{96 \times 54 \times 50 \times 100} < 6.635$, 没有 99% 的把握;

(2) $\bar{p} > p + 1.65 \sqrt{\frac{p(1-p)}{150}}$, 故有优化提升.

18.

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $4S_n = 3a_n + 4$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = (-1)^{n-1}na_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

【参考答案】见解析.

【详细解析】(1) 因为 $4S_n = 3a_n + 4$, 所以 $4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 4$, 两式相减可得: $4a_{n+1} = 3a_{n+1} - 3a_n$, 即: $a_{n+1} = -3a_n$, 又因为 $4S_1 = 3a_1 + 4$, 所以 $a_1 = 4$, 故数列 $\{a_n\}$ 是首项为 4, 公比为 -3 的等比数列, $a_n = 4 \cdot (-3)^{n-1}$;

(2) $b_n = (-1)^{n-1}na_n = 4n \cdot 3^{n-1}$, 所以 $T_n = 4(1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 3 \cdot 3^2 + \cdots + n \cdot 3^{n-1})$, $3T_n = 4(1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \cdots + n \cdot 3^n)$, 两式相减可得: $-2T_n = 4(1 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} - n \cdot 3^n) = 4(\frac{1-3^n}{1-3} - n \cdot 3^n) = (2 - 4n)3^n - 2$, $T_n = (2n-1)3^n + 1$.

解法 2: $b_n = (-1)^{n-1}na_n = 4n \cdot 3^{n-1}$, 所以 $T_n = T_{n-1} + 4n \cdot 3^{n-1}$, 两边同时减去 $(2n-1)3^n$ 可得: $T_n - (2n-1)3^n = T_{n-1} - (2n-3)3^{n-1}$, 故 $\{T_n - (2n-1)3^n\}$ 为常数数列, 即: $T_n - (2n-1)3^n = 1$, $T_n = (2n-1)3^n + 1$.

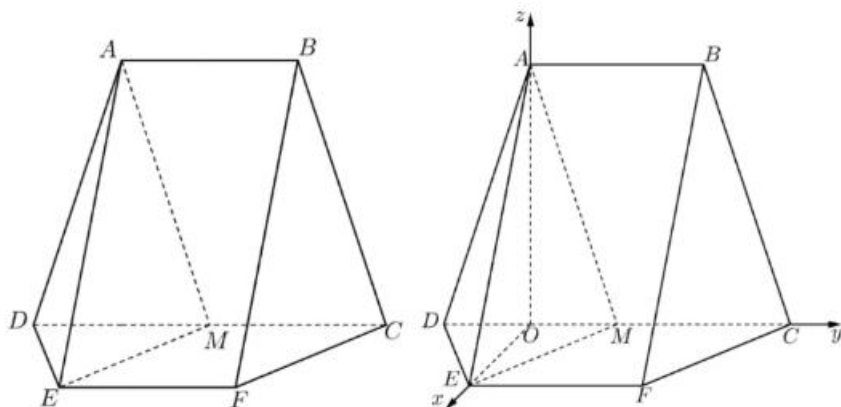
19.

如图, 已知 $AB \parallel CD$, $CD \parallel EF$, $AB = DE = EF = CF = 2$,

$CD = 4$, $AD = BC = \sqrt{10}$, $AE = 2\sqrt{3}$, M 为 CD 的中点.

(1) 证明: $EM \parallel$ 平面 BCF ;

(2) 求二面角 $A-EM-B$ 的正弦值.



【参考答案】见解析

【详细解析】(1)由题意： $EF \parallel CM$ ， $EF = CM$ ，而 $CF \not\subset$ 平面 ADO ， $EM \not\subset$ 平面 ADO ，所以 $EM \parallel$ 平面 BCF ；

(2)取 DM 的中点 O ，连结 OA ， OE ，则 $OA \perp DM$ ， $OE \perp DM$ ， $OA = 3$ ， $OE = \sqrt{3}$ ，而 $AE = 2\sqrt{3}$ ，故 $OA \perp OE$ 。以 O 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A(0, 0, 3)$ ， $E(\sqrt{3}, 0, 0)$ ， $M(0, 1, 0)$ ， $B(0, 2, 3)$ ， $\overrightarrow{AE} = (\sqrt{3}, 0, -3)$ ， $\overrightarrow{EM} = (-\sqrt{3}, 1, 0)$ ， $\overrightarrow{MB} = (0, 1, 3)$ ，

设平面 AEM 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，由 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{EM} = 0 \end{cases}$ 可得： $\begin{cases} \sqrt{3}x - 3z = 0 \\ -\sqrt{3}x + y = 0 \end{cases}$ ，令 $z = 1$ ，则 $\vec{n} = (\sqrt{3}, 3, 1)$ ，同理：取平面 BEM 的法向量为 $\vec{m} = (\sqrt{3}, 3, -1)$ ，则 $\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{11}{13}$ ， $\sin \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{4\sqrt{3}}{13}$ ，故二面角 $A-EM-B$ 的正弦值为 $\frac{4\sqrt{3}}{13}$ 。

20.

已知函数 $f(x) = (1 - ax)\ln(1 + x) - x$ 。

(1)当 $a = -2$ 时，求 $f(x)$ 的极值；

(2)当 $x \geq 0$ 时， $f(x) \geq 0$ ，求 a 的取值范围。

【参考答案】见解析

【详细解析】(1)当 $a = -2$ 时， $f(x) = (1 + 2x)\ln(1 + x) - x$ ， $x > -1$ 。 $f'(x) = 2\ln(1 + x) + \frac{x}{1 + x}$ ，当 $x > 0$ 时， $f'(x) > 0$ ，当 $-1 < x < 0$ 时， $f'(x) < 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上递减，在 $(0, +\infty)$ 上递

增, 故 $f(x)$ 的极小值为 $f(0)=0$, 无极大值;

(2) $f(x)=(1-ax)\ln(1+x)-x$, $f'(x)=-a\ln(1+x)-\frac{(a+1)x}{1+x}$. 令 $g(x)=f'(x)$, 则 $g'(x)=-\frac{a}{1+x}-\frac{a+1}{(1+x)^2}$. 因为当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$, 且 $f(0)=0$, $f'(0)=0$, 所以 $g'(0)=-1-2a \geq 0$, $a \leq -\frac{1}{2}$. 当 $a \leq -\frac{1}{2}$ 时, $g'(x) \geq \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1}{2(1+x)^2} = \frac{x}{2(1+x)^2} \geq 0$, $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上递增, $g(x)=f'(x) \geq g(0)=0$, 故 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上递增, $f(x) \geq f(0)=0$ 恒成立, 即 a 的取值范围为 $(-\infty, -\frac{1}{2}]$.

21.

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F , 点 $M(1, \frac{3}{2})$ 在椭圆 C 上, 且 $MF \perp x$ 轴.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) $P(4, 0)$, 过 P 的直线与椭圆 C 交于 A, B 两点, N 为 FP 的中点, 直线 NB 与 MF 交于 Q ,

证明: $AQ \perp y$ 轴.

【参考答案】 见解析

【详细解析】 (1) 设椭圆 C 的左焦点为 F_1 , 则 $|F_1F|=2$, $|MF|=\frac{3}{2}$. 因为 $MF \perp x$ 轴, 所以 $|MF_1|=\frac{5}{2}$, $2a=|MF_1|+|MF|=4$, 解得: $a^2=4$, $b^2=a^2-1=3$, 故椭圆 C 的方程为: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$;

(2) **解法 1:** 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}$, 则 $\begin{cases} \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = 4 \\ \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} \lambda x_2 = 4 + 4\lambda - x_1 \\ \lambda y_2 = -y_1 \end{cases}$. 又由

$$\begin{cases} 3x_1^2 + 4y_1^2 = 12 \\ 3(\lambda x_2)^2 + 4(\lambda y_2)^2 = 12\lambda^2 \end{cases} \text{ 可得: } 3 \cdot \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \cdot \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} + 4 \cdot \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \cdot \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda} = 12, \text{ 结合上式可得: } 5\lambda -$$

$$2\lambda x_2 + 3 = 0. P(4, 0), F(1, 0), N(\frac{5}{2}, 0), \text{ 则 } y_Q = \frac{3y_2}{5 - 2x_2} = \frac{3\lambda y_2}{5\lambda - 2\lambda x_2} = -\lambda y_2 = y_1, \text{ 故 } AQ \perp y$$

轴.

解法 2: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, , 则 $\frac{y_1}{x_1 - 4} = \frac{y_2}{x_2 - 4}$, 即: $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 4(y_2 - y_1)$, 所以 $(x_1 y_2 -$

$$x_2 y_1)(x_1 y_2 + x_2 y_1) = x_1^2 y_2^2 - x_2^2 y_1^2 = (4 + \frac{4y_1^2}{3})y_2^2 - (4 + \frac{4y_2^2}{3})y_1^2 = 4(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 4(y_2 - y_1)(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

$$\text{即: } x_1 y_2 + x_2 y_1 = y_2 + y_1, 2x_2 y_1 = 5y_1 - 3y_2. P(4, 0), F(1, 0), N(\frac{5}{2}, 0), \text{ 则 } y_Q = \frac{3y_2}{5 - 2x_2} = \frac{3y_1 y_2}{5y_1 - 2y_1 x_2}$$

$= y_1$, 故 $AQ \perp y$ 轴.

(二)选考题: 共 10 分.

22.

在平面直角坐标系 xOy

中, 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho =$

$$\rho \cos \theta + 1.$$

(1)写出 C 的直角坐标方程;

(2)直线 $\begin{cases} x=t \\ y=t+a \end{cases}$ (t 为参数)与曲线 C 交于 A, B 两点, 若 $|AB|=2$, 求 a 的值.

【参考答案】见解析

【详细解析】(1)因为 $\rho = \rho \cos \theta + 1$, 所以 $\rho^2 = (\rho \cos \theta + 1)^2$, 故 C 的直角坐标方程为: $x^2 + y^2 = (x$

$$+ 1)^2, \text{ 即: } y^2 = 2x + 1;$$

(2)将 $\begin{cases} x=t \\ y=t+a \end{cases}$ 代入 $y^2 = 2x + 1$ 可得: $t^2 + 2(a - 1)t + a^2 - 1 = 0$, $|AB| = \sqrt{2}|t_1 - t_2| = \sqrt{16(1 - a)} = 2$,

$$\text{解得: } a = \frac{3}{4}.$$

23.

实数 a, b 满足 $a + b \geq 3$.

(1)证明: $2a^2+2b^2>a+b$;

(2)证明: $|a-2b^2|+|b-2a^2|\geqslant 6$.

【解析】(1)因为 $a+b\geqslant 3$, 所以 $2a^2+2b^2\geqslant (a+b)^2>a+b$;

(2) $|a-2b^2|+|b-2a^2|\geqslant |a-2b^2+b-2a^2|=|2a^2+2b^2-(a+b)|=2a^2+2b^2-(a+b)\geqslant (a+b)^2-(a+b)=(a+b)(a+b-1)\geqslant 6$.